4. Circuits électriques en régime sinusoïdal

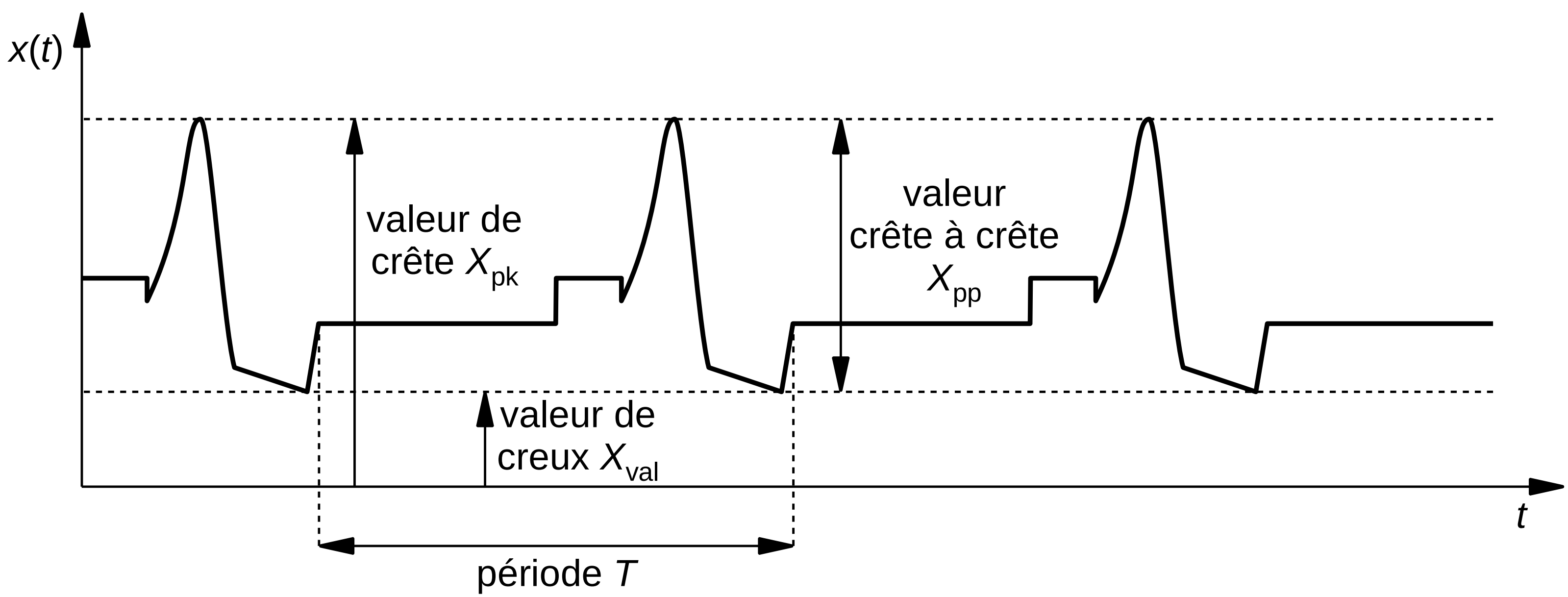
Description quantitative des grandeurs périodiques
Puissance instantanée, active et valeur efficace
Représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales
Condensateur et bobine
Puissance réactive, apparente et facteur de puissance
Transformateur

Paramètres des grandeurs périodiques

- Une grandeur variable dans le temps est appelée **périodique** si ses valeurs répètent après une certaine intervalle
- Dans le domaine temporel :
  - L'intervalle de répétition la plus courte est appelée **période**
  - L'inverse de la période est appelée **fréquence**

$$f = \frac{1}{T} \qquad [T] = 1\ \mathrm{s} \qquad [f] = 1\ \mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$$

- Dans le domaine électrique :

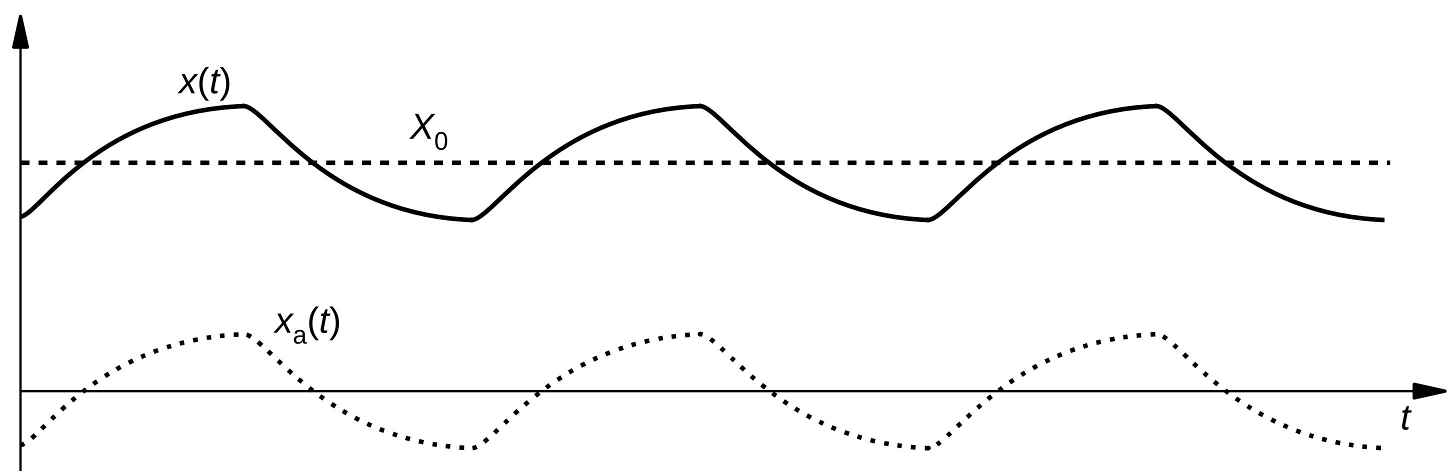


Composantes d'une grandeur périodique

- Toute grandeur périodique peut être représentée comme la somme d'une **composante continue** et d'une **composante alternative**

$$x(t) = X_0 + x_a(t)$$

  - La composante alternative (AC) représente ce qui est variable dans le temps
  - La composante continue (DC) représente le décalage de la composante alternative par rapport à l'axe du temps
- Par convention, les grandeurs variables dans le temps sont notées avec des lettres minuscules



Valeur moyenne d'une grandeur périodique

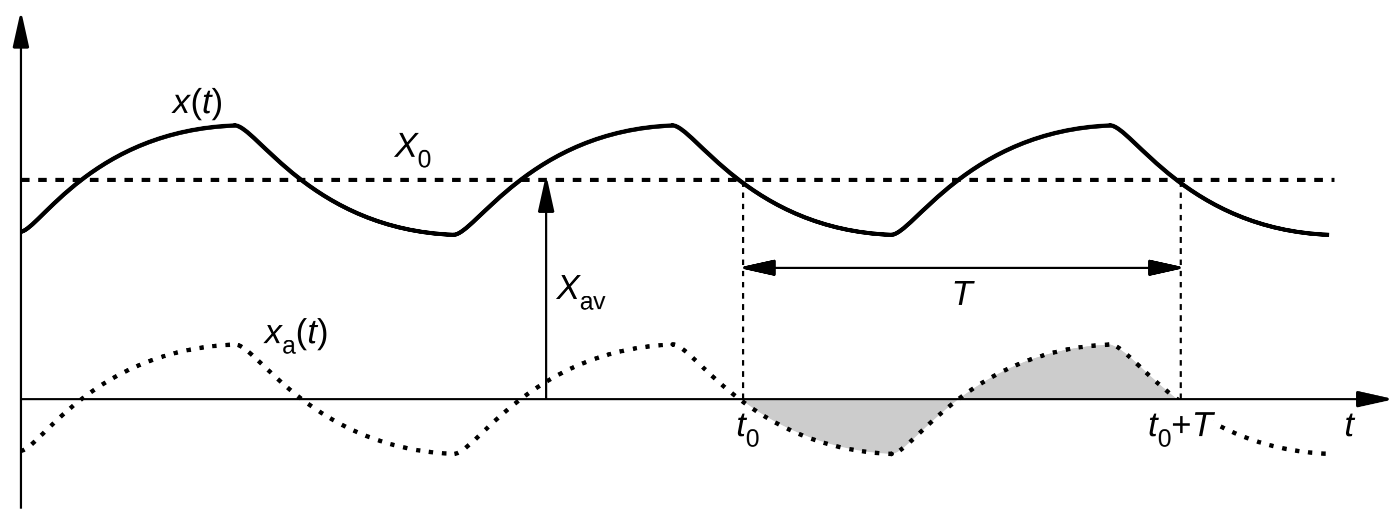
- La valeur de la composante continue est égale à la valeur moyenne

$$X_0 = X_{av} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}t$$

- La valeur moyenne de la composante alternative est nulle

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_a\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (x - X_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} X_0\,\mathrm{d}t =$$

$$= X_0 - \frac{1}{T} X_0 \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t = X_0 - \frac{X_0}{T}[t]_{t_0}^{t_0+T} = X_0 - \frac{X_0}{T} T = 0$$

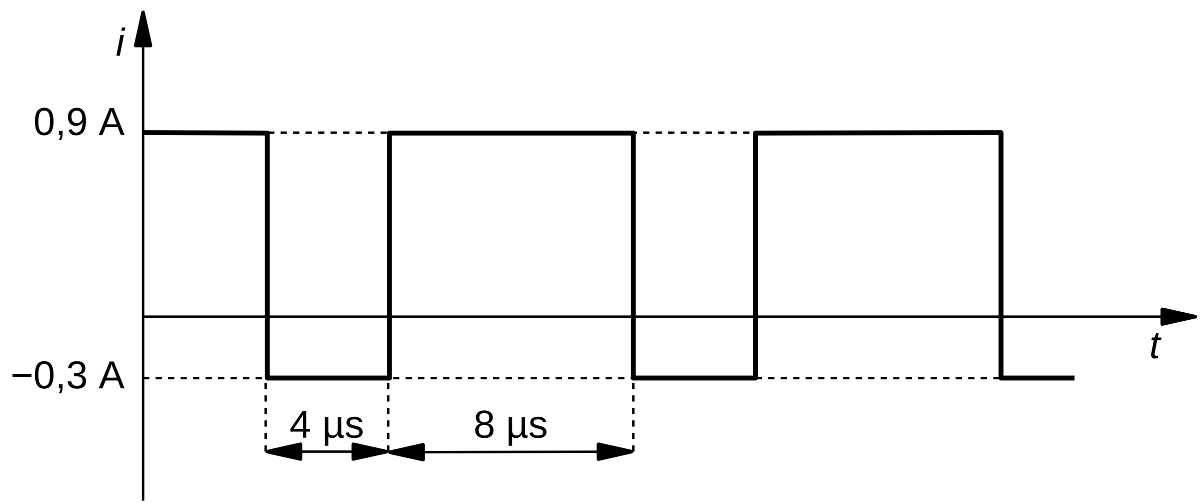


Exercices

- 4.1.1. La forme d'onde d'un courant périodique *i* est présentée ci-dessous.

  a) Calculer : la période, la fréquence, la valeur crête à crête et la valeur moyenne de ce courant.

  b) Tracer la composante continue et la composante alternative de ce courant.



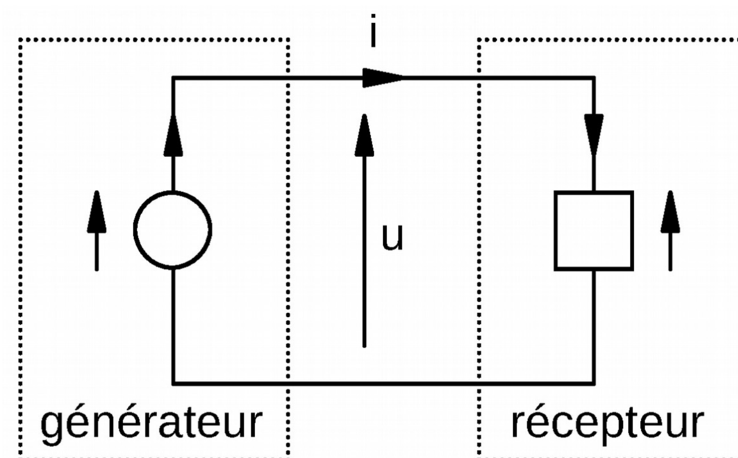
Puissance en régime périodique

- La formule de puissance électrique mise en jeu dans un dipôle s'applique également aux **valeurs instantanées** (= apparaissant à un instant donné) des grandeurs periodiques
- **Puissance instantanée (**= mise en jeu à un instant *t* donné)

$$p(t)=u(t)\cdot i(t)$$

  - En régime périodique, *u* et *i* peuvent changer du signe, alors *p* le peut aussi
  - En général, un dipôle peut consommer l'énergie à un instant et la délivrer au circuit à un autre
- **Énergie nette** mise en jeu dans une période de répétition

$$E_T=\int_{t_0}^{t_0+T} p\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_0+T} u\,i\,\mathrm{d}t$$



  - Pour peu qu'on suive les conventions, elle est positive si au long de cette période un dipôle considéré récepteur a reçu plus de l'énergie qu'il en a contribué au circuit
  - La classification dipôle passif/actif est basée sur cette énergie nette

Puissance moyenne

- Il serait plus pratique de se servir d'une valeur de puissance que de l'énergie qui peut croître ou baisser tout le temps
- La puissance instantanée varie aussi tout le temps
- Pourtant la **puissance moyenne** :

$$P_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T} \int_T p \, \mathrm{d}t = \frac{E_T}{T}$$

pour simplifier la notation : $\int_T x \, \mathrm{d}t \equiv \int_{t_0}^{t_0+T} x \, \mathrm{d}t$

  - correspond à l'énergie nette mise en jeu dans une période de répétition
  - alors elle reste constante (la même pour chaque période)
- C'est la valeur clé de puissance
  - Elle correspond à l'énergie effectivement consommée ou produite
  - Pour cela, est est appelée **puissance active** et l'indice « av » est normalement omise
- En fonction du courant et de la tension :

$$P = P_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T} \int_T p \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_T u \, i \, \mathrm{d}t \neq U_{\mathrm{av}} I_{\mathrm{av}}$$

car $\int f(x) g(x) \mathrm{d}x \neq \int f(x) \mathrm{d}x \cdot \int g(x) \mathrm{d}x$

Valeur efficace

- La loi d'Ohm s'applique aux valeurs instantanées, alors pour une résistance :

$$u(t)=i(t)\cdot R \quad \Rightarrow \quad p(t)=i^2(t)\cdot R=\frac{u^2(t)}{R}$$

$$P=\frac{1}{T}\int_T p\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_T i^2 R\,\mathrm{d}t=R\cdot\frac{1}{T}\int_T i^2\,\mathrm{d}t$$

  - Il serait convenable de pouvoir utiliser toujours les formules I^2R et U^2/R
- **Valeur efficace** d'une grandeur périodique x est définie comme

$$X_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T x^2\,\mathrm{d}t} \qquad \text{NB : toujours } X_{\mathrm{rms}}\geq 0$$

- Alors la loi de Joule :

$$P=I_{\mathrm{rms}}^2 R \quad \text{et par analogie} \quad P=\frac{U_{\mathrm{rms}}^2}{R}$$

  - Par comparaison avec les formules du régime continu, la valeur efficace d'une grandeur périodique exprime la valeur d'une grandeur continue que mettrait en jeu une même puissance que cette grandeur périodique
  - C'est une valeur clé des grandeurs périodiques, alors l'indice « rms » est normalement omise

Lois de l'électricité pour les valeurs efficaces

- La loi de Joule s'y applique (pour les résistances) par genèse
- La loi d'Ohm s'y applique aussi (pour les résistances) :

$$U_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T u^2\,\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T (R\,i)^2\,\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}R^2\int_T i^2\,\mathrm{d}t}=R\sqrt{\frac{1}{T}\int_T i^2\,\mathrm{d}t}=R\,I_{\mathrm{rms}}$$

- Mais ce n'est pas le cas avec les lois de Kirchhoff !

$$U_{\mathrm{rms}}\neq\sum U_{k,\mathrm{rms}} \qquad I_{\mathrm{rms}}\neq\sum I_{k,\mathrm{rms}}$$

  - On rencontre deux opérations non distributives par rapport à l'addition :

$$\int (x_1+x_2)^2\,\mathrm{d}t\neq\int (x_1^2+x_2^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{ni} \quad \sqrt{y_1+y_2}\neq\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}$$

- Diviseurs résistifs : cas particulier car le même *i* ou *u*

$$U_{\mathrm{tot,rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T u_{\mathrm{tot}}^2\,\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T \left(\sum u_k\right)^2\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T \left(\sum R_k\,i\right)^2\mathrm{d}t}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\int_T \left(\sum R_k\right)^2 i^2\,\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\sum R_k\right)^2\int_T i^2\,\mathrm{d}t}=\sum R_k\cdot\sqrt{\frac{1}{T}\int_T i^2\,\mathrm{d}t}=\sum R_k\cdot I_{\mathrm{rms}}$$

$$\text{avec} \quad U_{n,\mathrm{rms}}=R_n\,I_{\mathrm{rms}} \quad \text{alors} \quad U_{n,\mathrm{rms}}/U_{\mathrm{tot,rms}}=R_n/\sum R_k$$

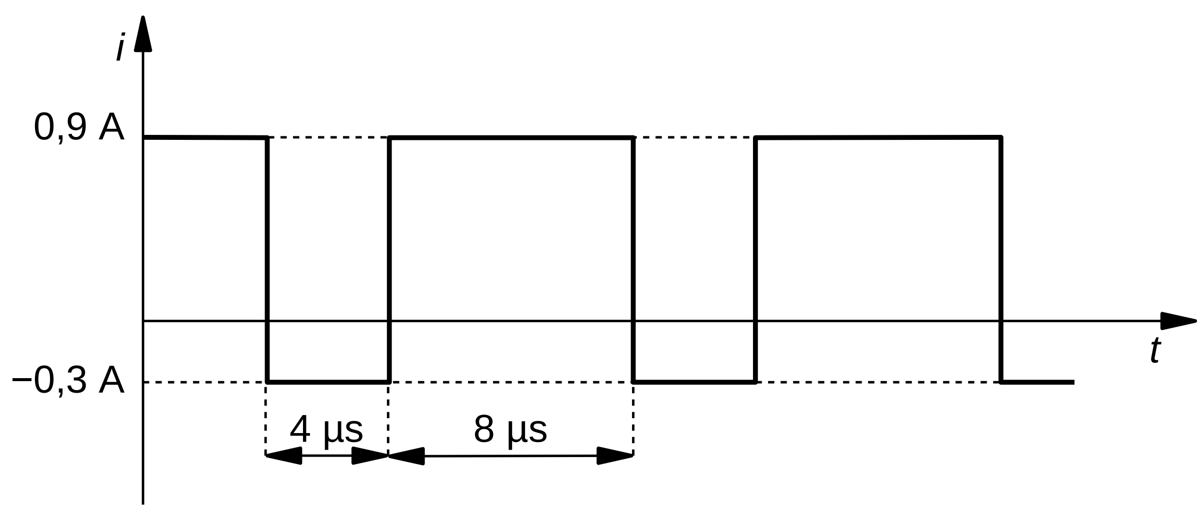
Exercices

- 4.2.1. Le courant *i* traverse un résistor de 25 Ω.

  a) Tracer la tension instantanée aux bornes de ce résistor et la puissance instantanée y dissipée.

  b) Calculer la valeur efficace de ce courant.

  c) Déterminer la puissance active dissipée dans le résistor.



Exercices

- 4.2.2. Une chaudière résistive possède une tension efficace nominale de 230 V et une puissance nominale de 1,8 kW.

  a) Déterminer le coût de l'énergie électrique que consommera cet appareil en une semaine si le prix de l'énergie est de 0,122 €/kWh.

  b) Calculer le courant d'alimentation de cette chaudière si elle fonctionne en conditions nominales.

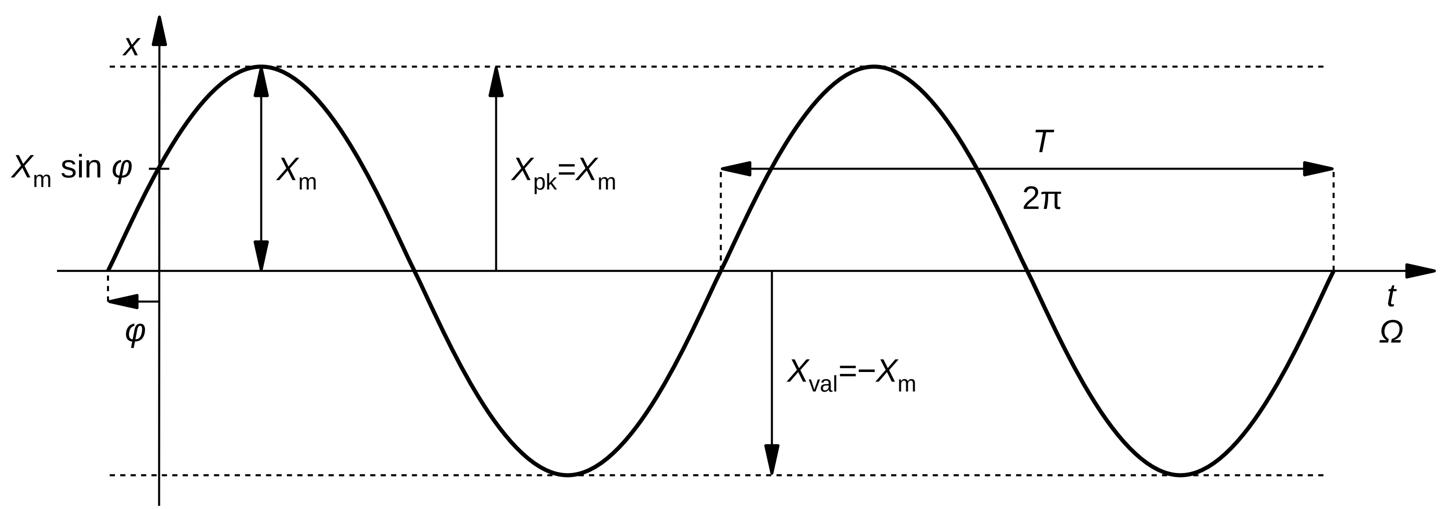
  c) Déterminer la résistance de cette chaudière. Quelle puissance sera convertie par cet appareil s'il est alimenté à partir du réseau américain 110 V (valeur efficace) ?

Description d'une grandeur sinusoïdale

- Formule mathématique

$$x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

  - X_m : **amplitude** (ou valeur maximale, égale à la valeur de crête)
  - ω : **pulsation** = $2\pi f$
  - φ : **phase à l'origine**
  - Le terme $\omega t + \varphi$ représente la **phase** Ω qui est un angle
- Deux points du temps caractéristiques :
  - $t = 0$: $x = X_m \sin \varphi$ — φ est bien la phase à l'origine
  - $t = T$: $x = X_m \sin(2\pi + \varphi) = X_m \sin \varphi$ — $\Delta t = T$ correspond à $\Delta\Omega = 2\pi$



Valeur moyenne d'une grandeur sinusoïdale

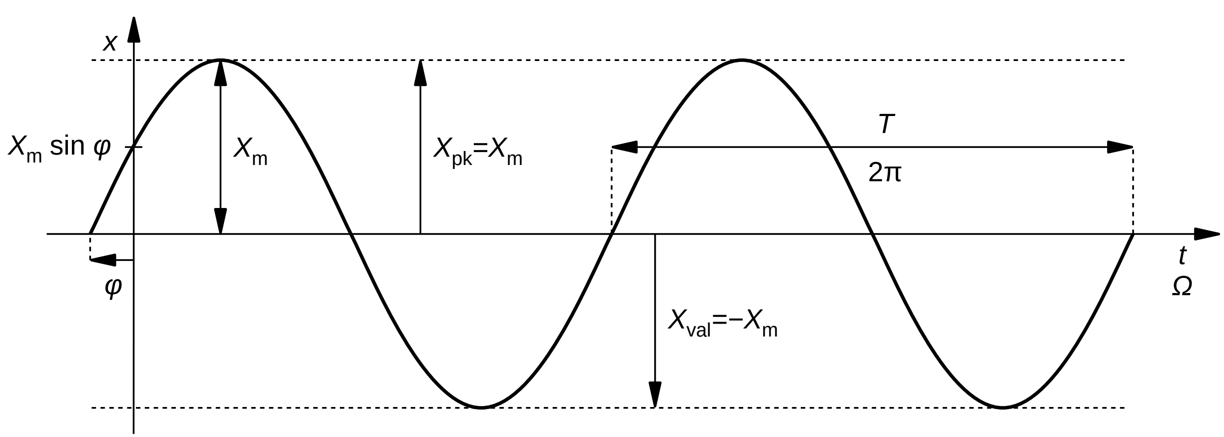
- La fonction sinus est symétrique par rapport à l'axe du temps, alors $|X_{pk}| = |X_{val}| = X_m$ et sa valeur moyenne est nulle

$$X_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T X_m \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} X_m \left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)\right]_0^T =$$

$$= -\frac{X_m}{T\omega}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}T + \varphi\right) - \cos(0 + \varphi)\right] = -\frac{X_m}{T\omega}\left[\cos(2\pi + \varphi) - \cos\varphi\right] =$$

$$= -\frac{X_m}{T\omega}\left[\cos\varphi - \cos\varphi\right] = 0$$

- $X_0 = 0$ alors une grandeur sinusoïdale est une grandeur **alternative**



Valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale

- Pour simplifier le calcul, on assume $\varphi = 0$ et on intègre de 0 à T
  - Ça ne change pas le résultat, car φ juste décale la fonction le long de l'axe t

$$X_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2 \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(X_{\mathrm{m}} \sin \omega t\right)^2 \mathrm{d}t} = X_{\mathrm{m}} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(\sin \omega t\right)^2 \mathrm{d}t}$$

- Selon une formule de calcul intégral

$$\int_0^T (\sin \omega t)^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T =$$

$$= \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin\left(\frac{2\pi}{T}T\right)\right] - \left[\frac{0}{2} - \frac{1}{4\omega}\sin 0\right] = \frac{T}{2}$$

- Finalement :

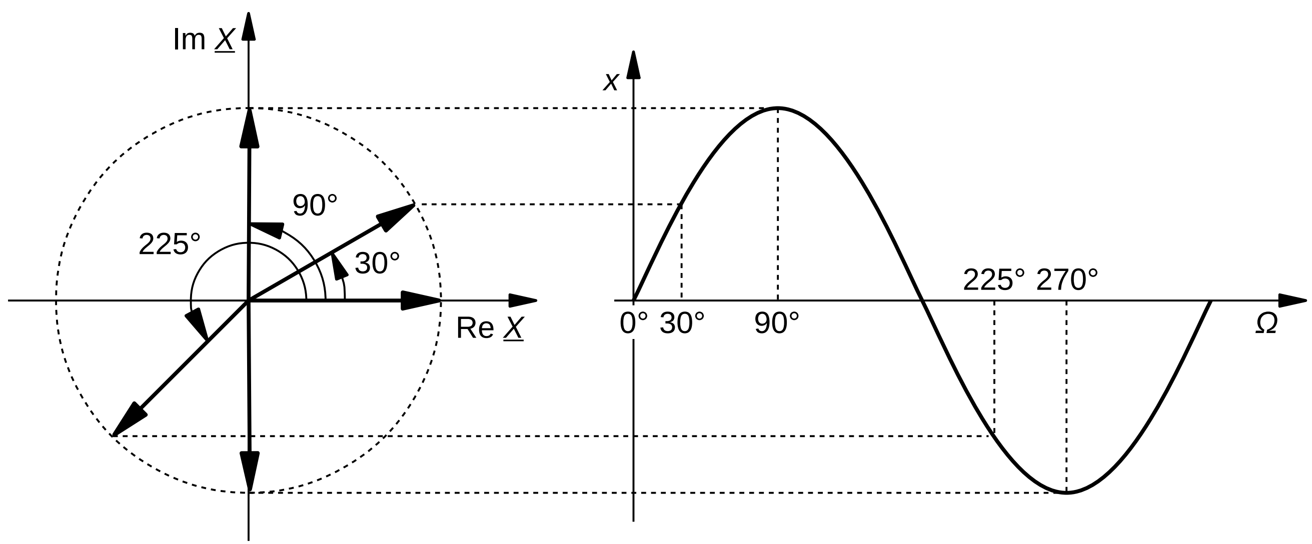
$$X_{\mathrm{rms}} = X_{\mathrm{m}} \sqrt{\frac{1}{T}\frac{T}{2}} = \frac{X_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \approx \frac{X_{\mathrm{m}}}{1{,}41} \quad \text{ou} \quad 0{,}707\, X_{\mathrm{m}}$$

Exercices

- 4.3.1. Calculer l'amplitude de la tension sinusoïdale d'alimentation du réseau basse tension européen où la valeur efficace est de 230 V.
- 4.3.2. L'entrée d'un appareil de mesure peut être représentée comme une résistance de 50 Ω. Déterminer la valeur efficace et l'amplitude maximales d'une tension sinusoïdale appliquée à cette entrée si la puissance admissible y dissipée est de 0,5 W.

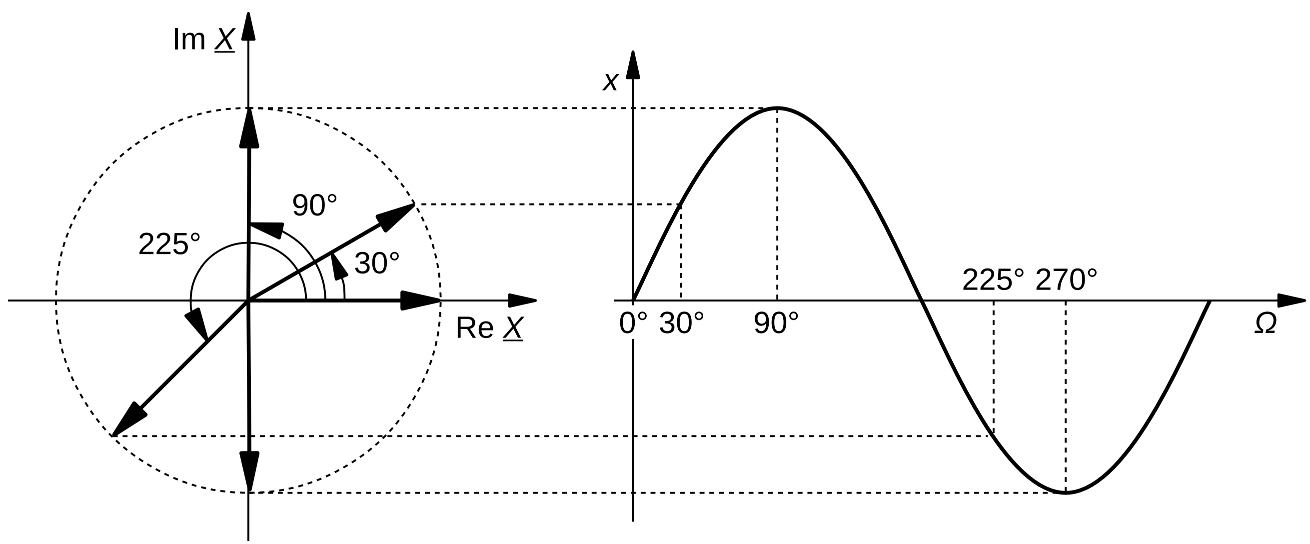
Représentation des grandeurs sinusoïdales avec les phaseurs

- Une grandeur sinusoïdale peut être représentée avec un vecteur correspondant appelé **phaseur** (ou **vecteur de Fresnel**)
  - La longueur du phaseur = valeur efficace X de la grandeur x en jeu
  - L'angle que forme le phaseur avec l'axe horizontale = phase Ω de la grandeur x
- En principe, un phaseur tourne constamment dans le temps
  - Le nombre de révolutions du phaseur par seconde est équivalent à la fréquence de la grandeur en jeu
  - Par convention, le sens de cette rotation est antihoraire



Représentation des grandeurs sinusoïdales avec les phaseurs (suite)

- La composante verticale du phaseur est égale à sa longueur multipliée par sinus de la phase actuelle Ω
  - Cela découle directement de la définition de la fonction sinus
  - Elle correspond alors à la valeur de la grandeur en jeu au moment donné
  - En fait, il faut encore multiplier le résultat par $\sqrt{2}$ car (par convention) la longueur du phaseur, c'est sa valeur efficace et non pas son amplitude
- Plus pratique : supposer que c'est le système de coordonnées qui tourne (dans le sens horaire) tandis que les phaseurs sont immobiles
  - Nécessite que toutes les grandeurs possédaient une même fréquence



Représentation des grandeurs sinusoïdales avec les nombres complexes

- **Formule d'Euler** :

$$X\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} = X\cos\Omega + \mathrm{j}\,X\sin\Omega$$

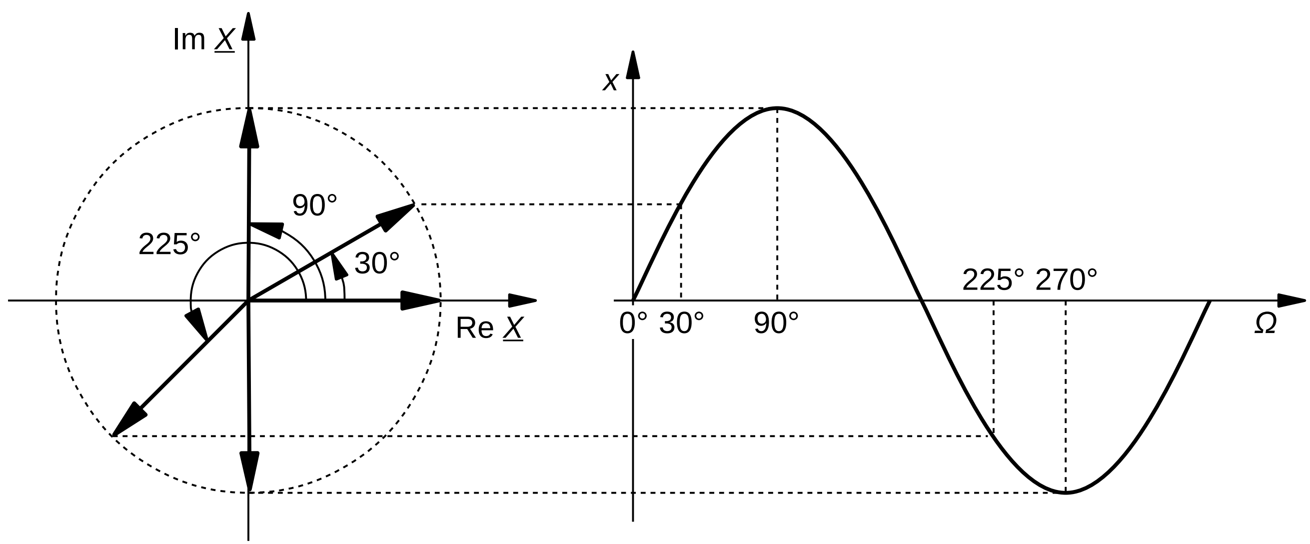
À rebours :

$$X\sin\Omega = \mathrm{Im}\left\{X\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right\}$$

$$X\sin\Omega = X\sin(\omega t+\varphi) = \mathrm{Im}\left\{X\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{X\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right\}$$

- Plus pratique : l'équivalent de la supposition de l'immobilité des phaseurs, c'est de négliger la composante variable ωt
  - On garde en mémoire que la grandeur varie dans le temps mais on néglige ce fait dans sa représentation géométrique ou algébrique
  - Toujours on utilise la valeur efficace comme le module du nombre complexe

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi) \;\Leftrightarrow\; \underline{X} = X\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$



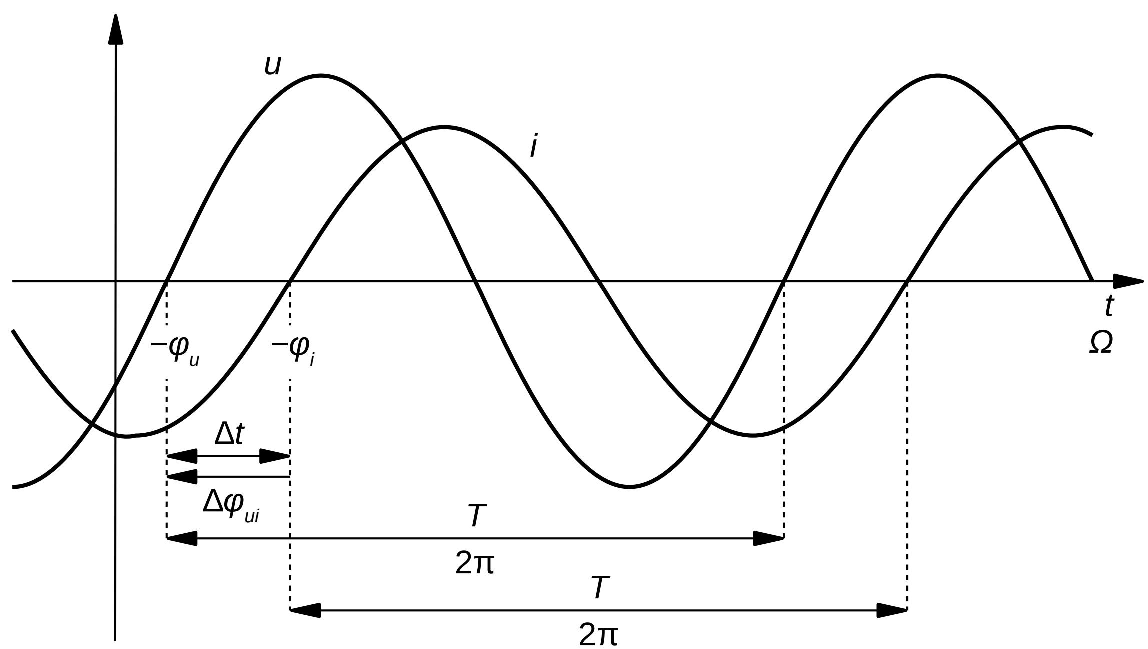
Déphasage

- Le **déphasage** est le décalage entre deux formes d'onde exprimé en termes de la phase
- Il est égal à la différence des phases aux origines

$$\Delta\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2=-\Delta\varphi_{21}$$

  - Par convention, pour le courant et la tension d'un dipôle, c'est le déphasage de la tension par rapport au courant (son signe est donc important) :

$$u(t)=U_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi_u)$$
$$i(t)=I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi_i)$$
$$\varphi=\Delta\varphi_{ui}=\varphi_u-\varphi_i$$

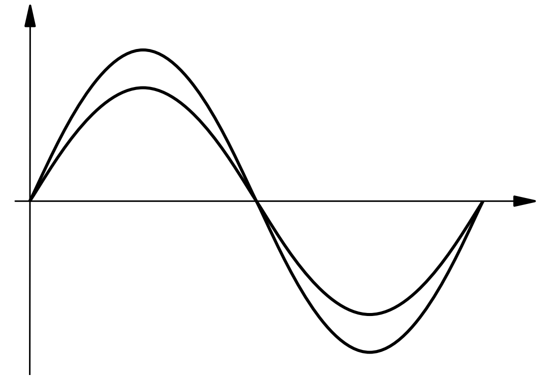


- Prenant en compte que la période T correspond à 2π ou $360°$ en termes de la phase :

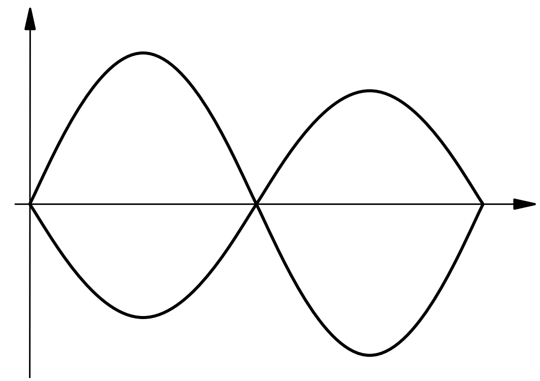
$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\quad\text{ou}\quad\frac{\Delta\varphi}{360°}$$

Déphasages particuliers

- Déphasage nul
  - $\Delta t = 0$
  - $\Delta\varphi = 0^\circ = 0$
  - Grandeurs dites **en phase**



- Déphasage d'une demi période
  - $\Delta t = T/2$
  - $\Delta\varphi = 180^\circ = \pi$
  - Grandeurs dites **en opposition de phase**



- Déphasage d'un quart période
  - $\Delta t = T/4$
  - $\Delta\varphi = 90^\circ = \pi/2$
  - Grandeurs dites **en quadrature de phase**