Détermination du déphasage avec les phaseurs et avec les nombres complexes

- La phase à l'origine, c'est l'argument du nombre complexe associé

$$\varphi_u = \arg\{\underline{U}\} = \arctan\frac{\operatorname{Im}\underline{U}}{\operatorname{Re}\underline{U}}$$

$$\varphi_i = \arg\{\underline{I}\} = \arctan\frac{\operatorname{Im}\underline{I}}{\operatorname{Re}\underline{I}}$$

- En utilisant la représentation d'Euler

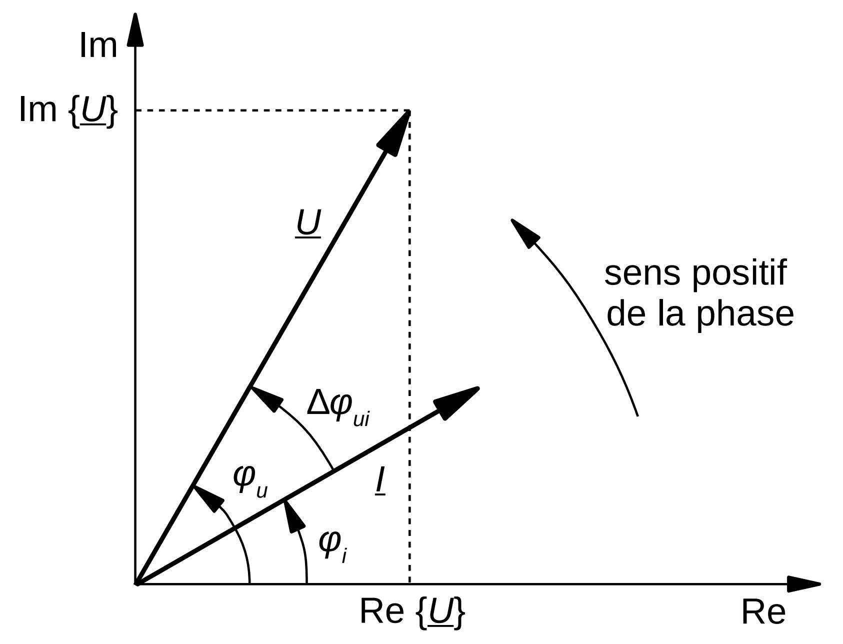
$$\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$$

$$\underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u-\varphi_i)} = \frac{U}{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\varphi_{ui}}$$

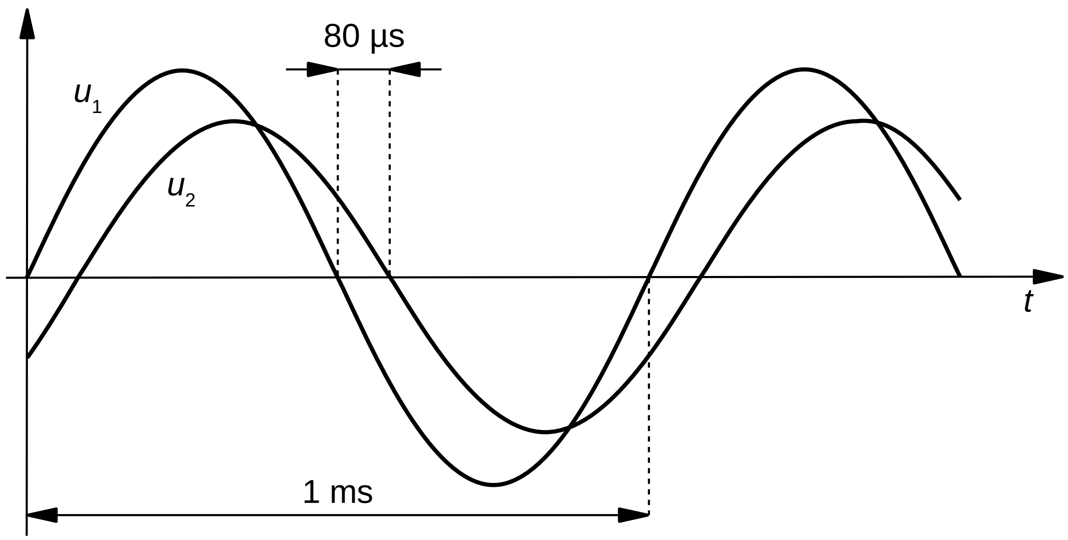
alors $\Delta\varphi_{ui} = \arg\left\{\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right\}$

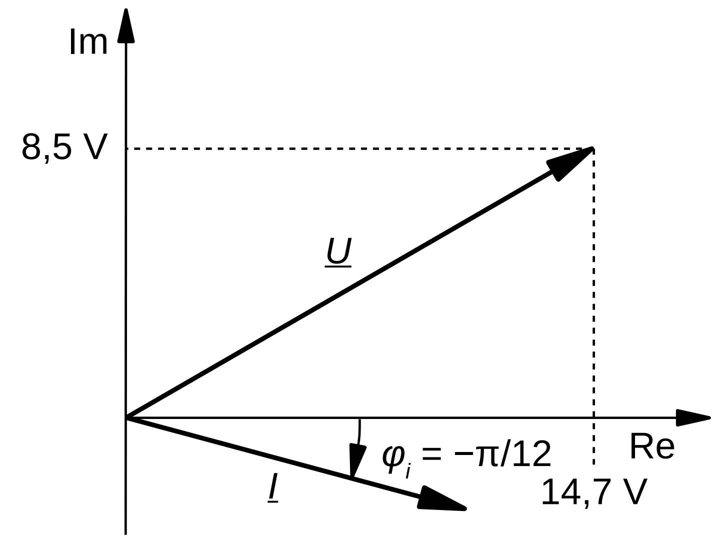
$$\Delta\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$$



Exercices

- 4.4.1. Déterminer le nombre complexe associé pour la tension :
  $u(t) = (12\sqrt{2})\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega t + \pi/4)$
- 4.4.2. Déterminer le déphasage :
  a) de la tension u_2 par rapport à u_1 ; b) du courant $\underline{I}$ par rapport à la tension $\underline{U}$

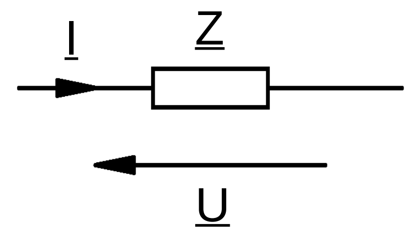




Impédance et admittance

- En régime sinusoïdal, c'est l'**impédance complexe** qui décrit la relation entre la tension et le courant d'un dipôle

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$



  - Unité : ohm [Ω]

- C'est un nombre complexe

$$\underline{Z}=\frac{U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}}{I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}}=\frac{U}{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}-\varphi_i}=\frac{U}{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u-\varphi_i)}=Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \quad\Rightarrow\quad |\underline{Z}|=Z=\frac{U}{I}=\frac{U_\mathrm{m}/\sqrt{2}}{I_\mathrm{m}/\sqrt{2}}=\frac{U_\mathrm{m}}{I_\mathrm{m}}$$

$$\arg\underline{Z}=\varphi=\varphi_u-\varphi_i$$

  - Son **module** exprime le rapport des valeurs efficaces (ou des amplitudes)
  - Son **argument** exprime le décalage en phase donc déphasage

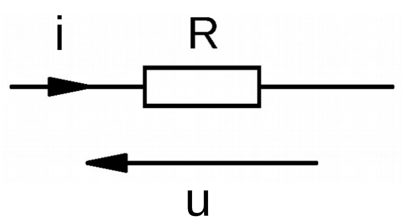
- C'est l'**admittance complexe** qui correspond à la conductance

$$\underline{Y}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}=\frac{1}{\underline{Z}} \qquad\Rightarrow\qquad Y=\frac{I}{U}=\frac{1}{Z} \qquad \arg\underline{Y}=\varphi_i-\varphi_u=-\arg\underline{Z}$$

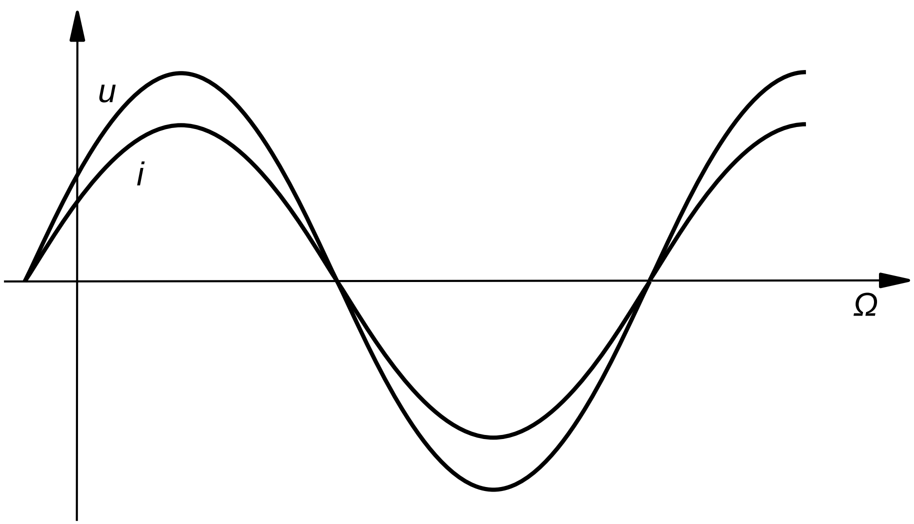
  - Unité : siemens [S]

Résistor parfait en régime sinusoïdal

- La loi d'Ohm s'appliquant aux valeurs instantanées, la tension est en phase avec le courant



$$u = R\,i$$



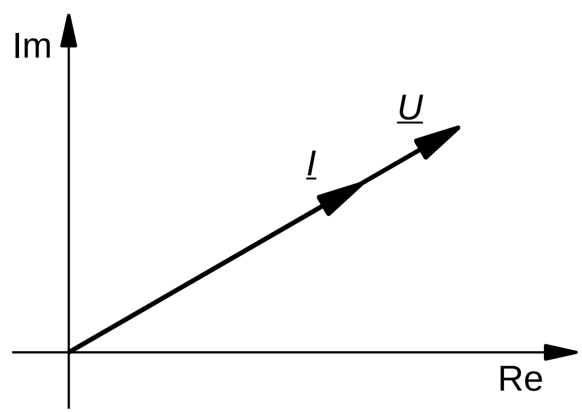
$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i) \;\Rightarrow\; \underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$$

$$u = R\,I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i) \;\Rightarrow\; \underline{U} = R\,I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{R} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = R$$

$$Z_\mathrm{R} = R \qquad \varphi_\mathrm{R} = 0$$

$$\underline{Y}_\mathrm{R} = \frac{1}{R} = G$$



Bobine

- Composant électrique basé sur l'enroulement d'un fil conducteur
- Son fonctionnement découle de deux lois basiques de l'électromagnétisme (équations de Maxwell)
  - Loi de Faraday : un champ magnétique B variable (la bobine ne fonctionne pas en régime continu) induit un champ électrique et donc une tension

$$u = n A \frac{\mathrm{d} B}{\mathrm{d} t}$$

  - Loi d'Ampère : un courant traversant un fil induit un champ magnétique

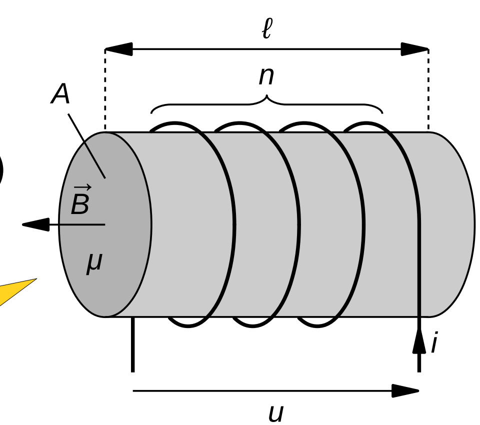
$$B \ell = \mu n I$$

- En combinant, on reçoit la relation courant-tension

$$u = \frac{\mu n^2 A}{\ell} \frac{\mathrm{d} i}{\mathrm{d} t} = L \frac{\mathrm{d} i}{\mathrm{d} t}$$

  - L : **inductance** (unité : henry [H], typiquement nH…mH)
  - μ : **perméabilité magnétique** [H/m]

$$L = \frac{\mu n^2 A}{\ell}$$



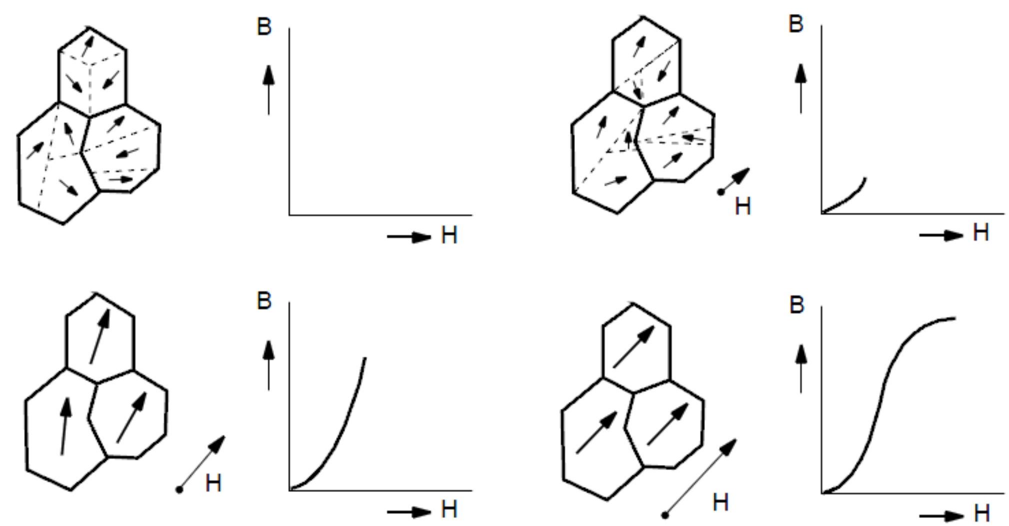
Énergie accumulée dans la bobine

- Dans le champs magnétique de la bobine, une énergie est accumulée
- Liée au processus de la magnétisation du matériau magnétique
  - Normalement, on considère les **ferromagnétiques**, ç.-à-d. les matériaux dont les propriétés magnétiques ressemblent le fer
  - Les directions du champ magnétique dans les **domaines** d'un ferromagnétique sont aléatoires ⇒ champ magnétique résultant nul
  - On peut forcer ces directions s'accorder avec le champ extérieur
  - Pourtant, cela nécessite qu'un travail soit exercé

$$W = \int u i \, dt =$$
$$= \int \left(n A \frac{dB}{dt} \right) \left(\frac{H\ell}{n} \right) dt =$$
$$= A\ell \int H \, dB = V \int H \, dB$$

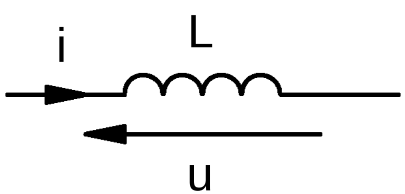
ou

$$= \int L \frac{di}{dt} i \, dt = \frac{1}{2} L i^2$$

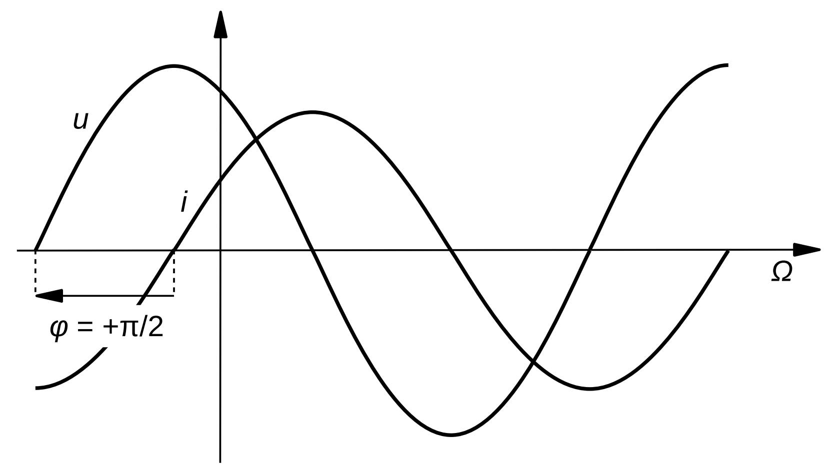


Comportement électrique de la bobine

- L'impédance d'une bobine augmente avec la fréquence
- Elle ne permettra un courant d'une haute fréquence de la traverser
- Elle s'opposera à des variations rapides du courant



$$u = L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,t}$$



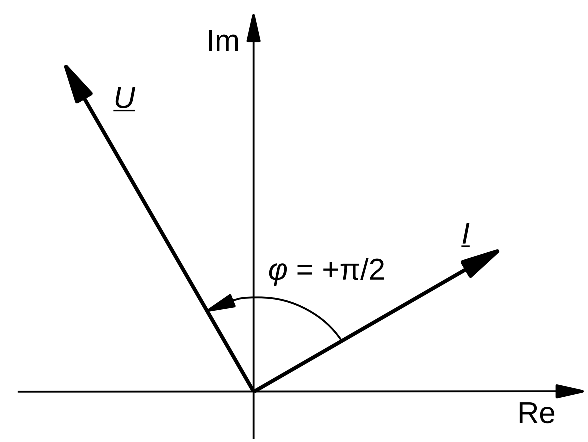
$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i) \;\Rightarrow\; \underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$$

$$u = L\,I\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\sin(\omega t + \varphi_i) = L\,I\sqrt{2}\,\omega\cos(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= \omega\,L\,I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \underline{U} = \omega\,L\,I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_i + \pi/2)}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{L} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \omega\,L\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = \mathrm{j}\,\omega\,L \qquad \underline{Y}_\mathrm{L} = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega\,L} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\,L}$$

$$Z_\mathrm{L} = \omega\,L \qquad \varphi_\mathrm{L} = +\frac{\pi}{2}$$

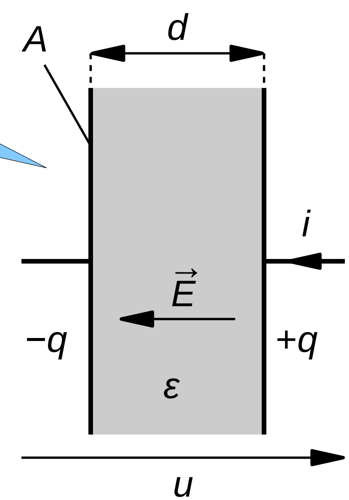


Condensateur

- Matériaux **diélectriques**
  - Ne contiennent pas de charges mobiles $\Rightarrow$ courant continu impossible
  - Un champ électrique y peut apparaître grâce aux **dipôles électrostatiques** (couples de charges de signes opposés)
- Condensateur plan : la plus simple structure idéalisée
  - Avec u constant, une charge proportionnelle accumule : positive q à la borne positive et négative de la même valeur q, à la borne négative
  - Si u change, alors q doit changer $\Rightarrow$ il y aura un mouvement de charge, donc un flux de courant $\Rightarrow$ avec une tension variable, un courant circulera
- Relation courant-tension

$$q = C\,u \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,t} = i = C\,\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t}$$

$$C = \frac{\varepsilon\,A}{d}$$

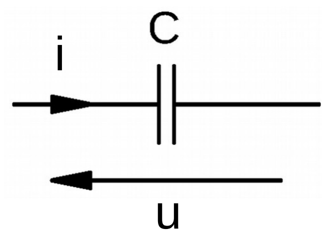


  - C : **capacité** (unité : farad [F], typiquement pF…µF)
  - ε : **permittivité diélectrique** [F/m]
- Énergie accumulée dans le champ électrostatique

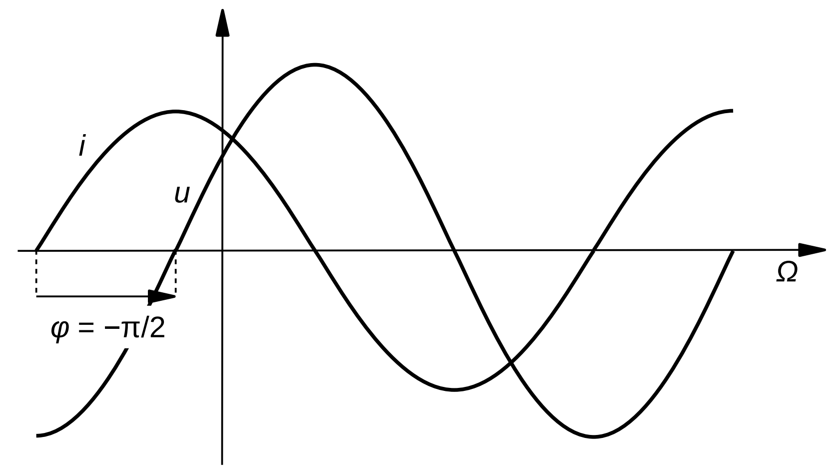
$$W = \frac{1}{2}Cu^2$$

Comportement électrique du condensateur

- L'impédance d'un condensateur diminue avec la fréquence
- Elle laissera un courant d'une haute fréquence la traverser facilement sans une importante chute de tension correspondante
- Elle s'opposera à des changements rapides de la tension



$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$



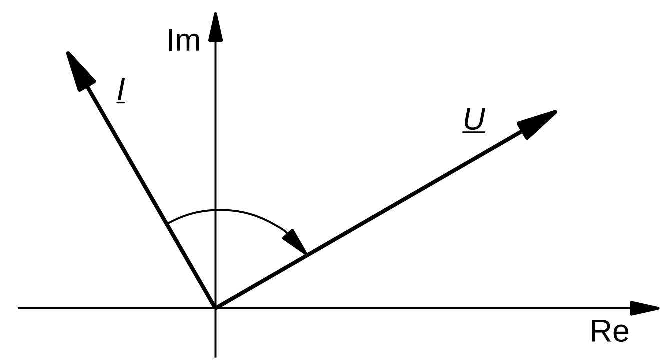
$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u) \;\Rightarrow\; \underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$$

$$i = C\,U\sqrt{2}\,\omega\cos(\omega t + \varphi_u) =$$

$$= \omega C U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; \underline{I} = \omega C U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u + \pi/2)}$$

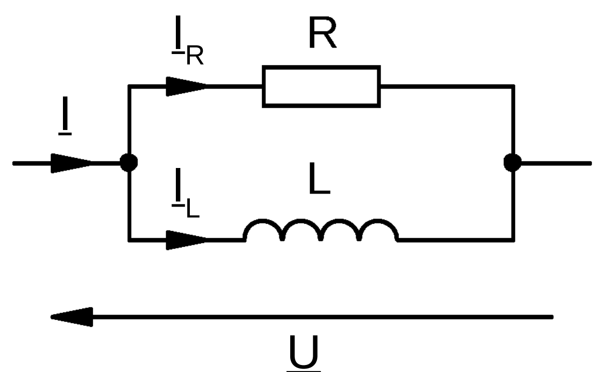
$$\underline{Z}_\mathrm{C} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{\omega C}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C} \qquad \underline{Y}_\mathrm{C} = \mathrm{j}\,\omega\,C$$

$$Z_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C} \qquad \varphi_\mathrm{C} = -\frac{\pi}{2}$$



Exercice

- 4.5.1. Le circuit ci-dessous est alimenté par une source de tension sinusoïdale $\underline{U}$. Avec un multimètre, on a mesuré I_R = 10 mA, I_L = 25 mA (valeurs efficaces). Déterminer la valeur efficace du courant $\underline{I}$ ainsi que son déphasage par rapport à la tension $\underline{U}$.



Circuits linéaires en régime sinusoïdal

- La bobine et le condensateur sont des composants linéaires
  - Ils sont décrits par des équations différentielles mais toutefois linéaires
- Si toutes les sources dans un circuit linéaire sont sinusoïdales d'une fréquence donnée, alors toutes les tensions et tous les courants dans ce circuit sont également sinusoïdaux de la même fréquence
  - Il est possible d'utiliser leur représentation par phaseurs ou par nombres complexes
- Aux phaseurs ainsi qu'aux nombres complexes représentant des grandeurs sinusoïdales dans un circuit linéaire, s'appliquent :
  - la loi d'Ohm
  - les lois de Kirchhoff (la loi des nœuds, la loi des mailles)
  - les théorèmes de Norton et de Thévenin
  - le principe de superposition
  - donc aussi toutes les formules dérivées (diviseur de tension, diviseur de courant, association en série, association en parallèle…)

Associations de dipôles passifs linéaires en régime sinusoïdal

- Une association de dipôles passifs linéaires se comporte comme un dipôle passif linéaire
  - Elle peut être caractérisée par une impédance ou une admittance complexe équivalente
- À partir des lois de Kirchhoff, on reçoit (à noter les valeurs complexes et non pas les modules !)
  - pour une association en série : $\underline{Z}_{\mathrm{eq}} = \sum_k \underline{Z}_k$
  - pour une association en parallèle : $\underline{Y}_{\mathrm{eq}} = \sum_k \underline{Y}_k$ ou $\frac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}$
- Comme l'impédance (ou l'admittance) équivalente peut être traitée d'un dipôle à part, la loi d'Ohm s'y applique aux valeurs efficaces

$$\underline{Z}_{\mathrm{eq}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{eq}}}{\underline{I}_{\mathrm{eq}}} = \frac{U_{\mathrm{eq}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{u\,\mathrm{eq}}}}{I_{\mathrm{eq}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{i\,\mathrm{eq}}}} = \frac{U_{\mathrm{eq}}}{I_{\mathrm{eq}}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{u\,\mathrm{eq}} - \varphi_{i\,\mathrm{eq}})} = Z_{\mathrm{eq}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{eq}}} \quad \text{alors} \quad Z_{\mathrm{eq}} = \frac{U_{\mathrm{eq}}}{I_{\mathrm{eq}}}$$

Exercice

- 4.6.1. Une bobine est alimentée à partir d'un générateur de tension sinusoïdale dont la résistance interne est de 50 Ω. On a réglé l'amplitude de la tension aux bornes du générateur à 5 V et sa fréquence à 1 kHz.

  a) Calculer l'inductance de la bobine si on a mesuré un courant efficace de 35 mA.

  b) Quel est le déphasage de ce courant par rapport à la tension à vide du générateur ?

  c) Tracer la tension à vide du générateur ainsi que le courant et la tension aux bornes de la bobine.

Puissance moyenne d'un dipôle linéaire en régime sinusoïdal

- Considérons un courant et une tension sinusoïdaux déphasés de φ

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{i}) \qquad u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{i} + \varphi)$$

$$p = u\,i = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{i} + \varphi)\cdot I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{i}) =$$

$$= U\,I\left[\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{i} + \varphi - \omega t - \varphi_\mathrm{i}) - \cos(\omega t + \varphi_\mathrm{i} + \varphi + \omega t + \varphi_\mathrm{i})\right] =$$

$$= UI\left[\cos\varphi - \cos(2\,\omega t + 2\,\varphi_\mathrm{i} + \varphi)\right]$$

en utilisant : $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$

- Effet énergétique net

$$p_\mathrm{av} = P = UI(\cos\varphi + 0) = UI\cos\varphi$$

car cos φ est une constante et la valeur moyenne de cos $2\omega t$ est nulle

- Cas particuliers des composants parfaits
  - Résistor : $P = UI\cos 0° = UI$
  - Bobine : $P = UI\cos 90° = 0$
  - Condensateur : $P = UI\cos(-90°) = 0$
- Ni la bobine ni le condensateur parfaits ne consomment pas de puissance nette et donc ils ne dissipent pas de l'énergie

Puissance apparente

- La **puissance active *P***, c'est la puissance consommée nette
  - Elle est définie comme la valeur moyenne de la puissance instantanée
  - Mais attention : la puissance active d'un condensateur étant nulle, ça ne veut pas dire qu'on peut négliger son courant qui peut toutefois être important
- Le circuit doit être capable de supporter à la fois le courant I et la tension U, ce qui est exprimé par la **puissance apparente *S***

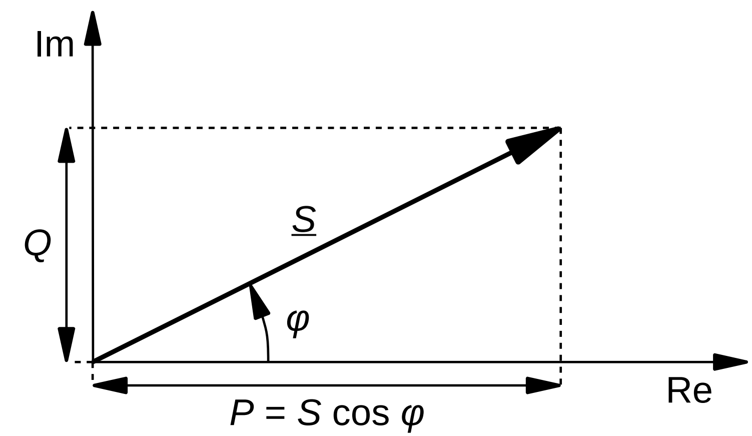
$$S = UI$$

  - Unité conventionnelle : voltampère [VA] (mathématiquement 1 VA = 1 W)
  - Elle définit les capacités en tension et en courant nécessaires des composants du circuit
- La partie de la puissance apparente qui contribue au courant mais ne contribue pas à la consommation, c'est la **puissance réactive *Q***
  - Elle représente la puissance qui circule entre les composants d'un circuit mais qui n'y est pas consommée
  - C'est alors elle qui correspond à l'énergie mise en jeu dans la bobine et dans le condensateur parfaits

Puissance réactive

- Une certaine énergie peut être accumulée dans un condensateur ou une bobine à partir d'une source et ensuite retournée au circuit
  - Toutefois, le condensateur et la bobine restent des composants passifs, car cette énergie retournée n'est jamais supérieure à l'énergie accumulée
- Si on représente $S = UI$ avec un nombre complexe $\underline{S}$ à l'angle de φ, alors $P = UI \cos \varphi$ est sa partie réelle
- $\underline{S}$ étant composée de P et Q, Q doit constituer sa partie imaginaire

$$\underline{S} = P + \mathrm{j}\, Q \quad \Rightarrow \quad S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



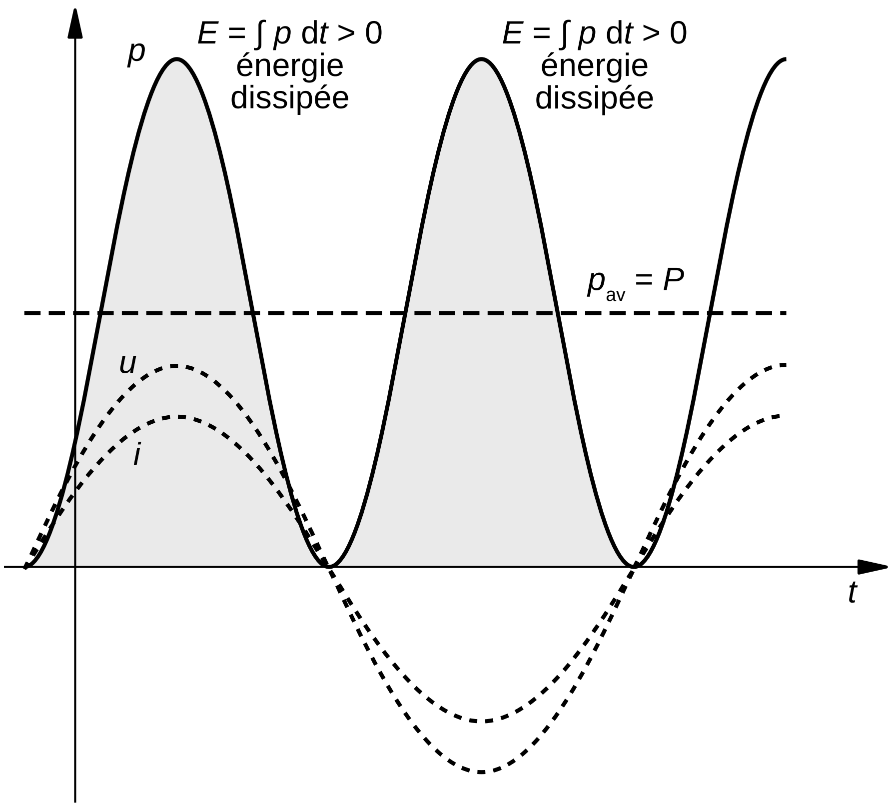
- Alors la puissance réactive vaut

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \quad \text{ou} \quad S \sin \varphi = UI \sin \varphi$$

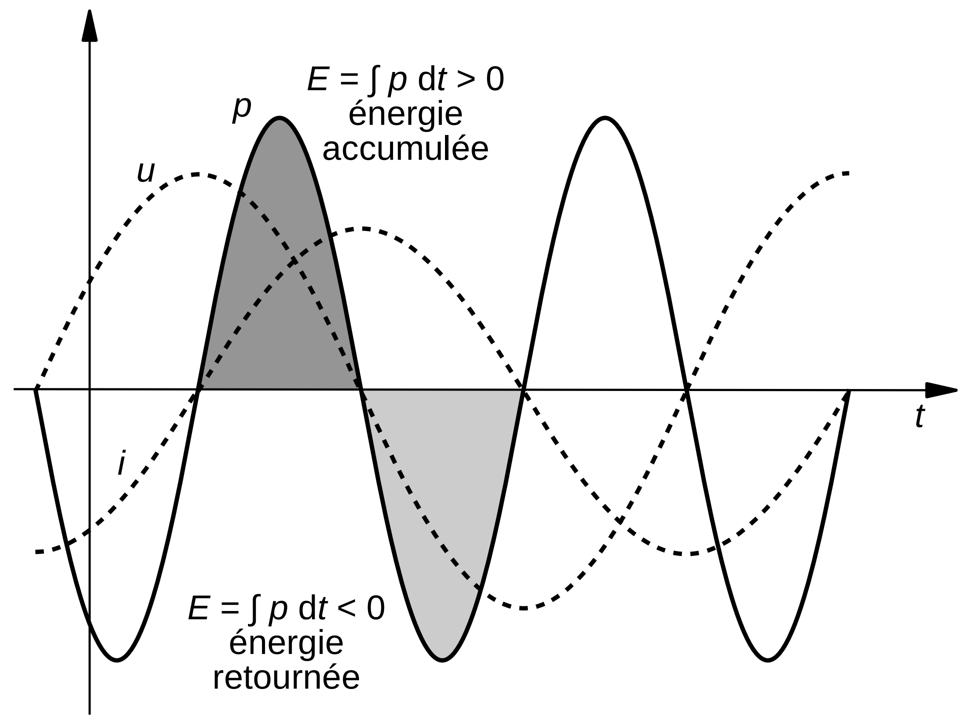
  - Unité : voltampère réactif [var] (mathématiquement 1 var = 1 W)
- Cas particuliers des composants parfaits
  - Résistor : $Q = UI \sin 0° = 0$
  - Bobine : $Q = UI \sin 90° = UI$
  - Condensateur : $Q = UI \sin (-90°) = -UI$

Analyse temporelle

- Résistor
  - À tout moment $p \geq 0$
  - Composante alternative de 2ω
  - Composante constante = P : c'est le terme $UI \cos \varphi$



- Bobine
  - La puissance instantanée est une forme d'onde alternative
  - Une énergie accumulée où $p > 0$ et la même retournée où $p < 0$
  - Valeur moyenne = composante constante = P : nulle



Facteur de puissance

- Définition (applicable à tout dipôle en régime périodique)

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

- Cas particulier d'un dipôle passif en régime sinusoïdal

$$\lambda = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi$$

  - Résistor parfait : $\lambda = \cos 0^\circ = 1$
  - Bobine ou condensateur parfaits : $\lambda = \cos \pm 90^\circ = 0$

- Dans un système d'alimentation à une tension périodique donnée, le facteur de puissance d'un récepteur détermine le courant nécessaire pour y délivrer une puissance active donnée

$$\lambda = \frac{P}{UI} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{\lambda U}$$

  - Le moindre courant circulera pour un récepteur purement résistif
  - Maximiser le facteur de puissance, c'est minimiser le coût de l'installation (générateur, câbles, transformateurs, convertisseurs...)

Exercice

- 4.7.1. Un générateur sinusoïdal parfait produit une tension d'une fréquence de 400 Hz et d'une valeur efficace de 80 V. Il est chargé avec un récepteur qui peut être représenté comme une association en série d'une inductance de 20 mH et d'une résistance de 6 Ω. Calculer la puissance active, la puissance réactive et la puissance apparente mises en jeu dans ce récepteur ainsi que son facteur de puissance.